数理解析研究所講究録
第 1841 巻 2013 年 142-149

縮小射影法による準非拡大写像族の共通不動点への近似

APPROXIMATION TO A COMMON FIXED POINT OF A FAMILY OF GENERALIZED NONEXPANSIVE MAPPINGS BY THE SHIRNKING PROJECTION METHODS

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
鶴岡工業高等専門学校 総合科学科

DEPARTMENT OF GENERAL SCIENCE,
TSURUOKA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

1. はじめに

C を実ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像 (nonexpansive mapping), すなわち, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx \quad Ty\| \quad \|x \quad y\|$$

が成り立つとする. このとき, T の不動点 (fixed point) 全体の集合を $F(T) := \{z \in C : Tz = z\}$ で表すこととする. 非拡大写像の不動点近似法は多くの研究者によって議論されている ([5, 24, 28, 31, 32, 34, 37, 40] などを参照). 高橋-竹内-窪田 [37] は 中條-高橋 [28] にヒントを得て次の非拡大写像の不動点を求める次の点列近似法を提案した.

定理 1.1 ([37]). C を実ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像で $F(T)$ が空でないとする. x_0 を H の任意の元とし点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する: $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 \quad \alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n \quad z\| \quad \|x_n \quad z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0 \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x$ へ強収束する. ただし, P_K は E から E の空でない閉凸部分集合 K の上への距離射影である.

この手法は縮小射影法 (shrinking projection method) と呼ばれている. なお, 高橋-竹内-窪田 [37] は論文の中で 1 つの写像に関する不動点への収束定理だけでなく, 非拡大写像族の共通不動点への収束定理を得ている.

一方, 非拡大写像の概念をバナッハ空間へ拡張した擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping) と準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) と呼ばれる非線形写像がある. 近年, これらの性質や不動点近似法の研究も活発に行われている ([3, 7, 10–12, 15–18, 21–23, 25,

---

2010 *Mathematics Subject Classi cation.* Primary 47H09, Secondary 47H10, 47J25.
Key words and phrases. 準非拡大写像, サニー準非拡大射影, 共通不動点, 縮小射影法, モスコ収束.

26,30,33] などを参照). 2008年に Plubtieng-Ungchittrakool [30] は縮小射影法を用いて擬非拡大写像族の共通不動点を求める次の点列近似法を提案した.

定理 1.2 ([30]). C を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間の空でない閉凸集合とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C から C への擬非拡大写像で $\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ が空でないとする. x を E の任意の元とし, 点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する: $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 \quad \alpha_n) \sum_{i=0}^{r} \beta_n^{(i)} T_i x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : V(y_n, z) \quad V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x \end{cases}$$

とする. ただし, $T_0 = I$ で, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^{(i)}\} \subset [0,1]$ は以下を満たすものとする.

(i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < 1$,

(ii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{i=0}^{r} \beta_n^{(i)} = 1$ を満たし以下のいづれか一方を満たすとする.

(a) 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対し $\liminf_{n \to \infty} \beta_n^{(0)} \beta_n^{(i)} > 0$,

(b) $\lim_{n \to \infty} \beta_n^{(0)} = 0$ かつ各 $k, l = 1, 2, \ldots, r$ $(k \neq l)$ に対し $\liminf_{n \to \infty} \beta_n^{(k)} \beta_n^{(l)} > 0$.

このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $\Pi_F x$ に強収束する. ただし, $F = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ で Π_K は E から E の空でない閉凸部分集合 K の上への準距離射影 (generalized projection) である.

また, 2009年に木村-高橋 [21] は縮小射影法を用いた擬非拡大写像の共通不動点への収束定理を得た. この定理の証明には閉凸集合列の収束であるモスコ収束の概念を用いており高橋-竹内-窪田 [37] の証明とは違う新たな証明方法である. それにより, 空間の条件や点列の係数条件を弱めることに成功した.

本論文では, 準非拡大写像に関する縮小射影法を議論する. まず始めに準非拡大写像に関連する閉凸集合列のモスコ収束の概念を議論する. 次に木村-高橋 [21] の証明方法を利用して, Plubtieng-Ungchittrakool [30] の近似法を用いた準非拡大写像族の共通不動点への収束定理を議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸 (uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n \to \infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n \to \infty} \|x_n \quad y_n\| = 0$ となることである.

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $S(E)$ の元 x, y に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| \quad \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムがガトー微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $S(E)$ の元 y に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 x に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様ガトー微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $S(E)$ の元 x に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 y に関して一様に収束するとき, E のノルムがフレッシェ微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様フレッシェ微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

バナッハ空間 E がカデック・クリー条件 (Kadec-Klee property) を満たすとは, E の点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束し, $\{\|x_n\|\}$ が $\|x\|$ へ収束するときは, 常に点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することをいう.

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([4,35,36] を参照).

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;
(2) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである.
すなわち, $x \neq y \;\Rightarrow\; Jx \cap Jy = \emptyset$;
(3) E が回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間なら, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる. すなわち, $J_* = J^{-1}$ である;
(4) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
(5) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである;
(6) E が一様に滑らかであるための必要十分条件は, E^* が一様凸となることである;
(7) E^* がフレッシェ微分可能なノルムを持つための必要十分条件は, E が回帰的で狭義凸でカデック・クリー条件を満たすことである;
(8) E が一様に滑らかならば, J は E の有界集合上で一様連続になる.

3. 準非拡大写像とサニー準非拡大射影

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E の双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x,y) = \|x\|^2 \quad 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

で $E \quad E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([1,19,26] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| \quad \|y\|)^2 \quad V(x,y) \quad (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) E の元 x, y, z に対して, $V(x,y) = V(x,z) + V(z,y) + 2\langle x \quad z, Jz \quad Jy\rangle$ である;
(3) E が狭義凸ならば, E の元 x, y に対して $V(x,y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空集合でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 y に対して,

$$V(Tx,y) \quad V(x,y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([10, 11] を参照). ただし, $F(T)$ は写像 T の不動点の集合, すなわち $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ である.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の E の元 x と $t \quad 0$ に対して

$$R(Rx + t(x \quad Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の D の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.1 ([10, 11]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R_D を E から D の上への射影とする. このとき, R_D がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の E の元 x と D の元 y に対して,

$$\langle x \quad R_D x, JR_D x \quad Jy \rangle \quad 0$$

となることである. ただし, J は E の双対写像である.

E が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. そこで, 滑らかで狭義凸なバナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. このサニー準非拡大射影はヒルベルト空間の距離射影のバナッハ空間への拡張の一つである ([10, 11] を参照). また, 距離射影のバナッハ空間への拡張は他に複数あるがそれらに関心があれば [1, 9–11, 20, 35] などを参照されたし.

D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([10, 11] を参照). サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の結果が知られている.

定理 3.2 ([22]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) D はサニー準非拡大レトラクトである;
(2) JD は閉凸集合である.

このとき, D は閉集合となる.

定理 3.3 ([16]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像とする. このとき, $F(T)$ はサニー準非拡大レトラクトである.

定理 3.4 ([17]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $\mathcal{T}$ を E から E への準非拡大写像の族とする. このとき, $F(\mathcal{T})$ はサニー準非拡大レトラクトである. ただし, $F(\mathcal{T})$ は $\mathcal{T}$ の共通不動点全体の集合である.

4. サニー準非拡大射影とモスコ収束

$\{C_n\}$ をバナッハ空間 E の空でない閉凸集合の列とするとき, $\{C_n\}$ の強下極限集合 $\text{s-Li}_n C_n$ と弱上極限集合 $\text{w-Ls}_n C_n$ を

$$\begin{aligned}\text{s-Li}_n C_n &= \{x \in E : \exists \{x_n\} \subset E :\ x_n \to x,\ x_n \in C_n\ (\forall n \in \mathbb{N})\},\\ \text{w-Ls}_n C_n &= \{x \in E : \exists \{x_{n_i}\} \subset E :\ x_{n_i} \rightharpoonup x,\ x_{n_i} \in C_{n_i}\ (\forall i \in \mathbb{N})\}\end{aligned}$$

で定義する. ここで $\to$ は点列の強収束を, $\rightharpoonup$ は弱収束を表している. E の閉凸集合 C_0 が $C_0 = \text{s-Li}_n C_n = \text{w-Ls}_n C_n$ であるならば $\{C_n\}$ は C_0 にモスコ収束 (Mosco convergence) するといい

$$C_0 = \text{M-}\lim_n C_n$$

で表す ([2,27] を参照).

1984 年に塚田 [39] はバナッハ空間の距離射影に関して次の定理を証明した. 木村-高橋 [21] の定理の証明は, この定理 4.1 を利用している.

定理 4.1 ([39]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, $\{C_n\}$ が C_0 へモスコ収束し, $C_0 \neq \emptyset$ とする. このとき, E の任意の元 x に対し, $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ へ弱収束する. さらに, E がカデック・クリー条件を満たせば, 任意の $x \in E$ に対し, $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ へ強収束する. ただし, P_C は E から C の上への距離射影である.

茨木-木村 [8] は木村-高橋 [21] の証明手法を利用し, 準非拡大写像族の共通不動点の収束定理を得るために以下の定理を得た. これらは準非拡大写像と相性の良い非線形射影であるサニー準非拡大射影を用いた塚田 [39] タイプの定理である.

定理 4.2 ([8]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $\{D_n\}$ を E の空でない閉集合列で, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し JD_n が閉凸集合とする. JD_n が D_0^* にモスコ収束し, D_0^* が空でないとする. u を E の任意の元とし, $\{u_n\}$ を u に強収束する E の任意の点列とする. このとき, $\{JR_{D_n}u_n\}$ は $JR_{D_0}u$ へ弱収束する. ただし, $D_0 = J^{-1}D_0^*$ で R_K は E から E のサニー準非拡大レトラクト K の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 4.3 ([8]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシェ微分可能なノルムを持つとする. $\{D_n\}$ を E の空でない閉集合列で, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し JD_n が閉凸集合とし, JD_n が D_0^* にモスコ収束し, D_0^* が空でないとする. u を E の任意の元とし, $\{u_n\}$ を u に強収束する E の任意の点列とする. このとき, $\{JR_{D_n}u_n\}$ は $JR_{D_0}u$ へ強収束する. さらに, $\{R_{D_n}u_n\}$ は $R_{D_0}u$ へ弱収束する. ただし, $D_0 = J^{-1}D_0^*$ で R_K は E から E のサニー準非拡大レトラクト K の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 4.4 ([8]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシェ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. $\{D_n\}$ を E の空でない閉集合列で, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し JD_n が閉凸集合とし, JD_n が D_0^* にモスコ収束し, D_0^* が空でないとする. u を E の任意の元とし, $\{u_n\}$ を u に強収束する E の任意の点列とする. このとき, $\{R_{D_n}u_n\}$ は $R_{D_0}u$ へ強収束する. ただし, $D_0 = J^{-1}D_0^*$ で R_K は E から E のサニー準非拡大レトラクト K の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 4.5 ([8]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシェ微分可能なノルムを持つとする. $D_0, D_1, D_2, \ldots$ を E の空でない閉集合で, 各 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し JD_n が閉凸集合とする. 任意の E 元 u に対し, 点列 $\{R_{D_n} u\}$ が $R_{D_0} u$ へ強収束するとする. ただし, 各 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し R_{D_n} は E から D_n の上へのサニー準非拡大射影である. このとき,

$$JD_0 = \text{M-lim}\, JD_n$$

である.

定理 4.4 及び定理 4.5 より以下の定理を得る.

定理 4.6 ([8]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシェ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする. $D_0, D_1, D_2, \ldots$ を E の空でない閉集合で, 各 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し JD_n が閉凸集合とする. 各 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し R_{D_n} は E から D_n の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき,

$$JD_0 = \text{M-lim}\, JD_n$$

となる必要十分条件は, E の任意の元 u と, u に強収束する E の任意の点列 $\{u_n\}$ に対して $\{R_{D_n} u_n\}$ が $R_{D_0} u$ へ強収束することである.

なお, バナッハ空間に複数の非線形射影があることは前節でふれたが, それらの非線形射影とモスコ収束に関する結果に関心があれば [9–11, 13, 14, 20, 39] などを参照されたし.

5. 準非拡大写像族の共通不動点への強収束定理

最後に, 木村-高橋 [21] の証明手法と定理 4.4 を利用して, Plubtieng-Ungchittrakool [30] の近似法を用いた準非拡大写像族の共通不動点への強収束定理を得た.

定理 5.1 ([8]). E を一様凸バナッハ空間でフレッシェ微分可能なノルムを持つとし, C を E の空でない閉集合で JC が閉凸集合とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C から C への準非拡大写像で $\bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないとする. 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対して $\{z_n\}$ と $\{T_i z_n\}$ が共に z に強収束するときは常に $z \in \bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ となると仮定する. x を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{cases} y_n = \gamma_n x_n + (1 \quad \gamma_n) \displaystyle\sum_{i=1}^r \delta_n^{(i)} T_i x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : V(y_n, z) \quad V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{C_{n+1}} x \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^{(i)}\} \subset [0, 1]$ は以下を満たす実数とする.

(i) $\liminf_{n\to\infty} \gamma_n < 1$,
(ii) 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対し $\liminf_{n\to\infty} \delta_n^{(i)} > 0$,
(iii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{i=1}^r \delta_n^{(i)} = 1$.

このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $R_F x$ へ強収束する. ただし, $F = \bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ で, R_K は E から E のサニー準非拡大レトラクト K の上へのサニー準非拡大射影である.

主定理である定理 5.1 と定理 1.2 では扱っている写像が準非拡大写像と擬非拡大写像と違う写像である. また, 利用しているバナッハ空間での非線形射影もサニー準非拡大射影と擬距離射影と違いがある. しかし, これら 2 つの写像と 2 つの射影の間にはある種の双対関係がある ([6,22,29,38] を参照). このことを鑑みると, 定理 5.1 は定理 1.2 の拡張になっていることがわかる. 特に, E をヒルベルト空間で考えても拡張になっており, こちらの方が比較しやすいだろう (詳細は [8] を参照).

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 24740075 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[3] D. Butnariu, S. Reich and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal., **7** (2001), 151–174.

[4] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[5] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.

[6] T. Honda, T. Ibaraki and W. Takahashi, *Duality theorems and convergence theorems for nonlinear mappings in Banach spaces and applications*, Int. J. Math. Stat. **6** (2010), 46–64.

[7] 茨木貴徳, 「準非拡大写像に関する強収束定理とその応用」 京都大学数理解析研究所講究録 **1667** (2009), 149–159.

[8] T. Ibaraki and Y. Kimura, *Convergence of nonlinear projections and shrinking projection methods for common xed point problems*, J. Nonlinear Anal. Optim. **2** (2011), 407–428.

[9] T. Ibaraki, Y. Kimura and W. Takahashi, *Convergence Theorems for Generalized Projections and Maximal Monotone Operators in Banach Spaces*, Abstr. Appl. Anal, **2003** (2003), 621–629.

[10] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」 京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications*, Taiwanese J. Math. **11** (2007) 929–944.

[13] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Mosco convergence of sequences of retracts of four nonlinear projections in Banach spaces*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, Eds.), Yokohama Publishers, 2007, 139–147.

[14] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における 4 つの非線形射影と閉凸集合列の Mosco 収束」 京都大学数理解析研究所講究録 **1561** (2007), 144–151.

[15] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Block iterative methods for a nite family of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces* Numer. Funct. Anal. Optim. **29** (2008), 362–375.

[16] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Optimization I: Nonlinear Analysis, Contemp. Math., **513**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 169–180.

[17] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nite generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, **12** (2011), 407–428.

[18] W. Inthakon, S. Dhompongsa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for maximal monotone operators and generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 45–63.

[19] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[20] Y. Kimura and W. Takahashi, *Strong convergence of sunny nonexpansive retractions in Banach spaces*, PanAmer. Math. J., **9** (1999), 1–6.

[21] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[22] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[23] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Block iterative methods for a nite family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2007** (2007), Art. ID 21972, 18 pp.

[24] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[25] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 37–47.

[26] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[27] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math., **3** (1969), 510–585.

[28] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372-379.

[29] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *On the xed-point set of a family of relatively nonexpansive and generalized nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. **2010** (2010), Art. ID 414232, 14pp.

[30] S. Plubtieng and K. Ungchittrakool, *Hybrid iterative methods for convex feasibility problems and xed point problems of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2008** (2008), Art. ID 583082, 19pp.

[31] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach space*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.

[32] S. Reich, *Approximating xed points of nonexpansive mappings*, Panamer. Math. J., **4** (1994), 23–28.

[33] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances* Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Dekker, New York, 1996, 313–318.

[34] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3641–3645.

[35] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[36] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[37] W. Takahashi, Y Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[38] W. Takahashi and J.-C. Yao *Nonlinear operators of monotone type and convergence theorems with equilibrium problems in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 787–818.

[39] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.

[40] R. Wittmann, *Approximation of xed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math., **58** (1992), 486–491.